

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2022

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. **(8 poena)** Grlica ima tri sina: Labuda, Goluba i Radomira. Labuda je dobila kada je imala 20 godina, Goluba dvije godine nakon Labuda, i Radomira dvije godine nakon Goluba. Ove godine je broj Grlicinih godina jednak zbiru godina njenih sinova. Koliko Grlica ima godina?

Rješenje: Neka Grlica ima x godina. Tada Labud ima $x - 20$, Golub $x - 22$ a Radomir $x - 24$ godina. Iz uslova zadatka dobijamo jednačinu $x = x - 20 + x - 22 + x - 24$. Dalje je $x = 3x - 66$, odnosno $2x = 66$, pa je $x = 33$. Dakle, Grlica ima 33 godine. \square

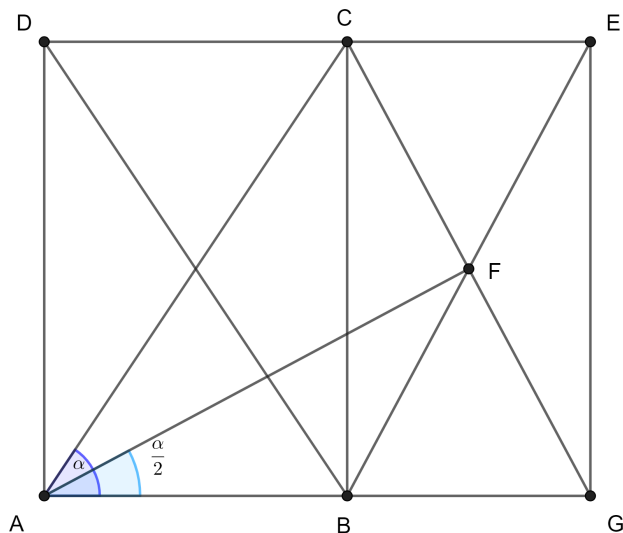
2. **(23 poena)** Naći najmanji prirodan broj N čiji je zbir cifara jednak 2022. Koliki je zbir cifara broja $N + 1$?

Rješenje: Tražimo najmanji broj, pa trazimo broj koji ima najmanje cifara. Kako je $\frac{2022}{9} = 224\frac{6}{9}$, zaključujemo da je najmanji broj cifara koje N može imati 225, i to su 224 cifre 9 i jedna cifra 6. Kako želimo najmanje moguće N , cifra 6 mora biti prva cifra tog broja, pa je $N = 699999 \dots 9$, gdje je 9 ponavlja 224 puta.
 $N + 1 = 700000 \dots 0$, gdje se 0 ponavlja 223 puta, pa je zbir cifara broja $N + 1$ jednak 7. \square

3. **(23 poena)** Dat je pravougaonik $ABCD$. Na polupravoj DC biramo tačku E takvu da je $DE = DB$. Neka je F središte duži BE . Dokazati da je poluprava AF simetrala ugla $\angle BAC$.

Rješenje: Konstruišimo normalu iz tačke E na polupravu AB , i označimo njihov presjek sa G . Četvorougao $BGEC$ je pravougaonik, kome su dijagonale BE i GC , i njihov presjek je

F , pa je F središte GC . Dalje je $AG = DE = DB = AC$, pa je trougao AGC jednakokraki. Odavde zaključujemo da je poluprava AF simetrala $\angle GAC = \angle BAC$. \square



4. (23 poena) Neka su $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2022}$ različiti prosti brojevi. Dokazati da broj $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_{2022}}$ nije cio broj.

Rješenje: Pretpostavimo da $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_{2022}}$ jeste cio broj. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_{2022}} &= \\ &= \frac{p_2 p_3 \dots p_{2022} + p_1 p_3 \dots p_{2022} + p_1 p_2 \dots p_{2022} + \dots + p_1 p_2 p_3 \dots p_{2021}}{p_1 p_2 p_3 \dots p_{2022}} = \\ &= \frac{p_2 p_3 \dots p_{2022} + p_1 (p_3 \dots p_{2022} + p_2 \dots p_{2022} + \dots + p_2 p_3 \dots p_{2021})}{p_1 p_2 p_3 \dots p_{2022}} = k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ova jednakost je ekvivalentna sa $p_2 p_3 \dots p_{2022} + p_1 (p_3 \dots p_{2022} + p_2 \dots p_{2022} + \dots + p_2 p_3 \dots p_{2021}) = k p_1 p_2 p_3 \dots p_{2022}$, pa odavde zaključujemo da svaki od brojeva $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2022}$ dijeli izraz sa lijeve strane. Znači, i p_1 dijeli izraz sa lijeve strane, pa ,pošto p_1 dijeli $p_1 (p_3 \dots p_{2022} + p_2 \dots p_{2022} + \dots + p_2 p_3 \dots p_{2021})$, dobijamo da p_1 dijeli i $p_2 p_3 \dots p_{2022}$, što je nemoguće. Dakle, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_{2022}}$ nije cio broj. \square

5. **(23 poena)** Dati su realni brojevi x , y i z takvi da važi $x + y + z = 0$ i $|x| + |y| + |z| \leq 1$.
Dokazati da važi $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leq \frac{1}{3}$.

Rješenje: Tražena nejednakost je ekvivalentna sa

$$3 \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \right) \leq 1$$

odnosno

$$3x + \frac{3}{2}y + z \leq 1$$

Posmatrajmo izraz sa lijeve strane nejednakosti. Važi:

$$\begin{aligned} 3x + \frac{3}{2}y + z &= 2(x + y + z) + x - \frac{y}{2} - z = x - \frac{y}{2} - z \leq \\ &\leq |x| + \frac{|y|}{2} + |z| \leq |x| + |y| + |z| \leq 1 \end{aligned}$$

pa je $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leq \frac{1}{3}$. \square

Vrijeme rada: 180 minuta.

Prvi zadatak se boduje sa maksimalno 8 bodova, a ostali sa maksimalno 23 boda.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.